

Concurs de admitere la Facultatea de Matematică și Informatică
Sesiunea Iulie 2017
Subiect la Matematică

Subiectul. 1 Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- i) Calculați A^2 , A^3 și $I_3 + A + A^2$.
- ii) Determinați suma $S = I_3 + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2017}$.
- iii) Arătați că dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ atunci $AX = XA$ dacă și numai dacă există $x, y, z \in \mathbb{C}$ astfel încât
$$X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$
- iv) Dacă ε este una din soluțiile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, iar $B = I_3 + \varepsilon A + \varepsilon^2 A^2$, arătați că $B^n = 3^{n-1}B$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul. 2 Pentru $a \in \mathbb{R}$ definim pe $\mathbb{R}$ legile de compoziție

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y + a \\ x \odot y &= xy + a(x + y) + a^2 - a \end{aligned}$$

- i) Arătați că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuația $x \oplus x = x \odot x$ are două soluții reale distincte.
- ii) Aflați structura generată pe $\mathbb{R}$ de aceste două legi de compoziție.

Subiectul. 3 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- i) Determinați asimptotele la graficul funcției f .
- ii) Demonstrați că $f(x) \leq \frac{1}{e}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.
- iii) Comparați numerele e^π și π^e .
- iv) Determinați intervalele de convexitate, respectiv concavitate, ale funcției f .
- v) Calculați $\int_1^e f(x) dx$.

Subiectul. 4 Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ și $F(x) = (x-1)e^x$.

- i) Să se verifice că F este o primitivă a funcției f .
- ii) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuație $x = -1$ și $x = 1$.
- iii) Să se demonstreze că
$$\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \frac{x+1}{x} - 2, \text{ pentru orice } x > 1.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu note cuprinse între 1 și 10.

Timp de lucru: 3 ore.

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIȘOARA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Concurs de admitere la Facultatea de Matematică și Informatică
Sesiunea Iulie 2017
Soluții și barem de corectare la Matematică

Subiectul. 1 Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- i) Calculați A^2 , A^3 și $I_3 + A + A^2$.
- ii) Determinați suma $S = I_3 + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2017}$
- iii) Arătați că dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ atunci $AX = XA$ dacă și numai dacă există $x, y, z \in \mathbb{C}$ astfel încât
- $$X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$
- iv) Dacă ε este una din soluțiile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, iar $B = I_3 + \varepsilon A + \varepsilon^2 A^2$, arătați că $B^n = 3^{n-1}B$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Barem: Start (1p)

i) Calculează corect $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = I_3$ și $I_2 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (1p)

ii) Justifică faptul că $A^{3n} = I_3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (1p)

Obține $S = I_3 + A + A^2 \sum_{k=0}^{671} A^{3k} (I_3 + A + A^2) = I_3 + A + 672A^2(I_3 + A + A^2) = I_3 + A + 672(I_3 + A + A^2)$
 $= 673(I_3 + A + A^2) - A^2 = \begin{pmatrix} 673 & 673 & 672 \\ 672 & 673 & 673 \\ 673 & 672 & 673 \end{pmatrix}$ (1p)

iii) Arată că toate matricile de forma $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$ comută cu A (1p)

Luând $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, din $AX = XA$ deduce că $b = t = x$, $c = u = y$ și $a = v = z$. (2p)

iv) Justifică $\varepsilon^3 = 1$ (1p)

Calculează și obține $B^2 = 3B$ (1p)

Demonstrează inductiv că $B^n = 3^{n-1}B$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (1p)

Subiectul. 2 Pentru $a \in \mathbb{R}$ definim pe $\mathbb{R}$ legile de compoziție

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y + a \\ x \odot y &= xy + a(x + y) + a^2 - a \end{aligned}$$

i) Arătați că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuația $x \oplus x = x \odot x$ are două soluții reale distincte.

ii) Aflați structura generată pe $\mathbb{R}$ de aceste două legi de compoziție.

Barem: Start (1p)

i) Ecuația $x \oplus x = x \odot x$ este echivalentă cu $x^2 + 2(a-1)x + a^2 - 2a = 0$ și are $\Delta = 4 > 0$, deci soluțiile reale distincte ($x_1 = -a$, $x_2 = 2 - a$) (1p)

ii) Observăm că pentru $a = 0$ cele două legi de compoziție devin adunarea și înmulțirea numerelor reale, prin urmare $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ este corp comutativ

Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, arbitrar fixat, avem:

- legea " $\oplus$ " este asociativă, comutativă, admite element neutru pe " $-a$ " și orice element din $\mathbb{R}$ este simetrizabil (3p)

- legea " $\odot$ " este asociativă, comutativă, are element neutru " $1 - a$ " și orice element din $\mathbb{R}$ diferit de " $-a$ " este simetrizabil (3p)

- legea " $\odot$ " este distributivă față de legea " $\oplus$ " (1p)

Prin urmare $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ este un corp comutativ, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ (1p)

Obs: Eventualul răspuns " $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ este inel comutativ" se punctează analog.

Subiectul. 3 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

i) Determinați asimptotele la graficul funcției f .

ii) Demonstrați că $f(x) \leq \frac{1}{e}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

iii) Comparați numerele e^π și π^e .

iv) Determinați intervalele de convexitate, respectiv concavitate, ale funcției f .

v) Calculați $\int_1^e f(x) dx$.

Barem: Start (1p)

i) Avem $\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, deci dreapta Oy este asimptotă verticală (0,5p)

Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, rezultă că Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ (0,5p)

ii) Avem $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$ și deci $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, e)$, iar $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (e, \infty)$ (1p)

Rezultă că $x = e$ este punct de maxim global pentru funcția f și, prin urmare, $f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$ (1p)

iii) Fie $x_1 = e$ și $x_2 = \pi$. Cum $x_1, x_2 \in [e, \infty)$ cu $x_1 < x_2$, din monotonie funcției f , rezultă că $f(e) > f(\pi)$ sau $\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$, ceea ce este echivalent cu $e^\pi > \pi^e$ (2p)

iv) Avem $f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$, de unde obținem că funcția f este concavă pe intervalul $(0, e^{3/2}]$ și convexă pe intervalul $[e^{3/2}, \infty)$ (2p)

v) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x (\ln x)' dx = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_1^e = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}$ (2p)

Subiectul. 4 Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ și $F(x) = (x-1)e^x$.

i) Să se verifice că F este o primitivă a funcției f .

ii) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuație $x = -1$ și $x = 1$.

iii) Să se demonstreze că $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \frac{x+1}{x} - 2$, pentru orice $x > 1$.

Barem: Start (1p)

i) Calculează F' și observă că $F' = f$ pe $\mathbb{R}$ (1p)

ii) $\mathcal{A} = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = - \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = F(-1) - 2F(0) + F(1) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ (3p)

iii) Observă $\frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} = \left(\frac{f'}{f}\right)'(t)$, pentru orice $t \geq 1$ (2p)

Cu formula Leibnitz-Newton se obține că $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \frac{f'(t)}{f(t)} \Big|_1^x = \frac{x+1}{x} - 2$ (3p)

Notă: Orice altă variantă de rezolvare corectă se punctează corespunzător.